

Colle du 03/12 - Sujet 1
Equa diff d'ordre 2 et calcul dans $\mathbb{R}$

Question de cours.

- Donner la définition d'un maximum, d'un minimum d'une partie.
- Déterminer une solution de l'équation $(E) : \forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = (2t + 1)e^t$.

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$|x + 3| - |x - 1| = |2x + 1|.$$

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad (1 + x^2)^2 y''(x) + 2x(1 + x^2) y'(x) - y(x) = 0.$$

On pourra poser $t = \arctan(x)$.

Colle du 03/12 - Sujet 2
Equa diff d'ordre 2 et calcul dans $\mathbb{R}$

Question de cours.

- Donner une condition suffisante à l'existence de la borne supérieure, inférieure.
- Déterminer l'ensemble des solutions de $(I) : |x + 2| + |3x - 1| \leq 4$.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x^2 - 3x + 2| \leq |x|$.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle d'inconnue y suivante :

$$(E) \quad xy'' + 2y' + xy = 0.$$

- Montrer que la fonction $y_0 :]0; \pi[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est une solution de (E) sur $]0; \pi[$.
- Soit $z \in \mathcal{F}(]0; \pi[, \mathbb{R})$. On pose pour tout $x \in]0; \pi[, y(x) = z(x)y_0(x)$. Démontrer que y est une solution de (E) si et seulement si z' est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 (F) que l'on déterminera.
- En déduire les solutions de (E) sur $]0; \pi[$.

Colle du 03/12 - Sujet 3
Equa diff d'ordre 2 et calcul dans $\mathbb{R}$

Question de cours.

- Enoncer la définition et propriété d'un problème de Cauchy à l'ordre 2.
- Déterminer l'ensemble des solutions de $(E) : \forall x \in \mathbb{R}_+, x^2 y''(x) + 7xy'(x) + 9y(x) = 0$.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : y'' - 3y' + 2y = x \operatorname{sh}(x)$.

Exercice 2. Discuter suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$, les solutions du système $(S) : \begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y + (a - 1)z = a \\ x + y + z = a + 1 \end{cases}$